Concours National Commun d'Admission aux Grandes Ecoles d'Ingénieurs - MAROC - 1999

PREMIERE EPREUVE DE MATHEMATIQUES

durée : 4 heures

Option MP

L'usage des calculatrices n'est pas autorisé pour cette épreuve.

* * *

Les candidats sont informés que la précision des raisonnements ainsi que le soin apporté à la rédaction seront des éléments pris en compte dans la notation. Les candidats pourront admettre et utiliser le résultat d'une question non résolue s'ils l'indiquent clairement sur la copie.

Préliminaire : Dans ce problème on étudie quelques propriétés de la fonction ζ, somme de la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^s}$. On rappelle que la fonction Gamma est définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$\Gamma(x)=\int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt.$$

Enfin on signale que l'utilisation de la comparaison séries-intégrales et de l'interversion du signe somme dans une suite double sommable sera très profitable dans ce problème.

Première partie

I-1 Montrer que la fonction ζ a pour domaine de définition $I=]1,+\infty[$.

I-2-a Montrer la convergence uniforme de la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^s}$ vers ζ sur $[a,+\infty[$, pour tout $a>1$.
I-2-b Cette série de fonctions converge-t-elle uniformément sur I ?

I-3-a Montrer que ζ est continue sur I.
I-3-b Déterminer avec soin ses limites aux bornes de I.
I-3-c Par comparaison avec une intégrale montrer l'équivalent $\zeta(s)\sim\frac{1}{s-1}$ au voisinage de 1.

I-4-a Montrer que ζ est de classe C^1 sur I et donner une expression de sa dérivée.
I-4-b Montrer que ζ est de classe C^∞ sur I et donner une expression de ses dérivées successives.

I-5-a Montrer l'équivalent $\zeta(s)-1\sim 2^{-s}$ au voisinage de $+\infty$ et en déduire la convergence de la série

$$\sum_{k\geqslant 2}(\zeta(k)-1).$$

I-5-b En introduisant une suite double sommable bien choisie, calculer la somme de la série précédente.

I-6 On considère pour $n \geqslant 1$ la fonction P_n à valeurs complexes définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$P_n(x) = \frac{1}{2i}\left((\sqrt{x}+i)^{2n+1} - (\sqrt{x}-i)^{2n+1}\right).$$

I-6-a Montrer que P_n est polynomiale.
I-6-b Déterminer ses racines dans $]0, +\infty[$.
I-6-c En déduire les relations pour $n \geqslant 1$:

$$\sum_{1\leqslant k\leqslant n} \operatorname{cotan}^2 \frac{k\pi}{2n+1} = \frac{n(2n-1)}{3}; \qquad \sum_{1\leqslant k\leqslant n} \frac{1}{\sin^2 \frac{k\pi}{2n+1}} = \frac{2n(n+1)}{3}.$$

I-6-d Démontrer, pour $t \in]0, \frac{\pi}{2}[$, les inégalités : $\operatorname{cotan} t \leqslant \frac{1}{t} \leqslant \frac{1}{\sin t}$.
I-6-e En déduire que $\zeta(2) = \dfrac{\pi^2}{6}$.

Deuxième partie

II-1 Soit $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$.
II-1-a Déterminer les coefficients de Fourier de la fonction 2π-périodique $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(t) = \cos xt$ sur $[-\pi, \pi]$.
II-1-b Etablir alors la relation pour tout $t \in [-\pi, \pi]$:

$$\cos xt = \frac{\sin \pi x}{\pi}\left(\frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2x}{x^2-n^2}\cos nt\right).$$

II-1-c En déduire l'égalité

$$\pi x \operatorname{cotan} \pi x = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x^2}{x^2-n^2}.$$

II-2-a Développer en série entière au voisinage de l'origine la fonction : $x \longrightarrow \dfrac{2x^2}{x^2-n^2}$, où $n \in \mathbb{N}^*$. Préciser le rayon de convergence.
II-2-b Montrer pour $|x| < 1$ la sommabilité de la suite double $\left(\dfrac{x^{2k}}{n^{2k}}\right)_{n,k\geqslant 1}$.
II-2-c En déduire pour $0 < |x| < 1$, la relation

$$\pi x \operatorname{cotan} \pi x = 1 - 2\sum_{k=1}^{\infty} \zeta(2k) x^{2k}.$$

II-3 Retrouver alors la valeur de $\zeta(2)$ puis calculer $\zeta(4)$.

II-4-a Exprimer $\tan(2x)$ en fonction $\tan(x)$, en déduire $\tan(x)$ en fonction de $\operatorname{cotan}(2x)$ et $\operatorname{cotan}(x)$, puis donner le développement en série entière au voisinage de l'origine de $\tan(x)$.
II-4-b Préciser le rayon de convergence.

II-5-a Montrer la convergence simple sur $[0, 1[$ des séries de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{nx^n}{1-x^n}$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{(1-x^n)^2}$.
II-5-b Etablir pour x dans $[0, 1[$ la relation

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^n}{1-x^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(1-x^n)^2}.$$

II-6-a Montrer la convergence uniforme sur $[0, 1]$ de la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(1+x+\cdots+x^{n-1})^2}$.

(*Indication*: Pour encadrer le terme général on pourra, par exemple, distinguer les cas
$0 \leqslant x \leqslant 1 - \dfrac{1}{n^{3/4}}$ et $1 - \dfrac{1}{n^{3/4}} \leqslant x \leqslant 1$.)

II-6-b En déduire $\lim\limits_{x\longrightarrow 1^-}(1-x)^2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{nx^n}{1-x^n}=\dfrac{\pi^2}{6}$.

Troisième partie

III-1 Montrer que la suite $u_n=1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}-\ln n$ est décroissante et converge vers un réel strictement positif γ (constante d'Euler).

III-2-a Montrer la convergence de la série $\sum\limits_{n\geqslant 2}\left(\dfrac{1}{n}+\ln(1-\dfrac{1}{n})\right)$.

III-2-b Etablir la relation

$$\gamma=1+\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{n}+\ln(1-\frac{1}{n})\right).$$

III-2-c En déduire la convergence de la série $\sum\limits_{k\geqslant 2}\dfrac{\zeta(k)-1}{k}$ et l'identité

$$\gamma=1-\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\zeta(k)-1}{k}.$$

III-3-a Etudier pour α réel l'intégrabilité de la fonction $t\longrightarrow\frac{t^{\alpha-1}}{e^t-1}$ sur l'intervalle$]0,+\infty[$. On posera

$$I_\alpha=\int_0^{+\infty}\frac{t^{\alpha-1}}{e^t-1}dt.$$

III-3-b En intégrant terme à terme une série de fonctions bien choisie, établir la relation :

$$\forall\,\alpha>1,\ \zeta(\alpha)\Gamma(\alpha)=I_\alpha.$$

III-4-a Démontrer que pour tout $s\geqslant 1$, la fonction $t\longrightarrow\dfrac{e^{-t}-e^{-st}}{t}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ et que son intégrale sur cet intervalle est égale à $\ln s$.
(Indication : On pourra, par exemple, montrer que pour $\varepsilon>0$ on a : $\displaystyle\int_\varepsilon^{+\infty}\frac{e^{-t}-e^{-st}}{t}dt=\int_\varepsilon^{s\varepsilon}\frac{e^{-t}}{t}dt$.)

III-4-b Montrer alors que

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\int_0^{+\infty}\left(e^{-t}+e^{-2t}+\cdots+e^{-nt}-\frac{e^{-t}-e^{-nt}}{t}\right)dt=\gamma.$$

III-4-c Montrer que la fonction $t\longrightarrow\left(\dfrac{1}{1-e^{-t}}-\dfrac{1}{t}\right)e^{-t}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ et que son intégrale sur cet intervalle est égale à γ.

III-4-d En déduire

$$\Gamma'(1)=\int_0^{+\infty}e^{-t}\ln t\ dt=-\gamma.$$

III-5-a Démontrer pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et $t\in[0,n]$: $\left(1-\dfrac{t}{n}\right)^n\leqslant e^{-t}$.

III-5-b Montrer pour $x>0$

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\int_0^n(1-\frac{t}{n})^nt^{x-1}dt=\Gamma(x).$$

III-5-c En déduire pour $x>0$

$$\Gamma(x)=\lim_{n\longrightarrow\infty}\ \frac{n^xn!}{x(x+1)\cdots(x+n)}.$$

III-6 Montrer pour $x > 0$ la convergence de $\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{x}{n} - \ln(1+\frac{x}{n})\right)$ et la relation

$$ln\Gamma(x) = -\gamma x - lnx + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{x}{n} - \ln(1+\frac{x}{n})\right).$$

III-7-a Démontrer avec soin la relation pour $x > 0$

$$\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = -\gamma - \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}\right).$$

III-7-b Retrouver alors la relation $\Gamma'(1) = -\gamma$ puis calculer $\Gamma''(1)$.

III-8 Etablir pour x dans $]0,1[$

$$\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = -\gamma - \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\zeta(n+1)x^n.$$

Quatrième partie

IV-1-a Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 1}\frac{x^n}{n^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. On note S_α sa somme sur son intervalle ouvert de convergence.
IV-1-b Déterminer S_α pour $\alpha = 1$ et pour $\alpha = -2$.

IV-2 Préciser la limite de S_α en 1 à gauche, suivant la valeur de $\alpha \geqslant 0$.

IV-3 On suppose $0 \leqslant \alpha < 1$. Par comparaison à l'aide d'une intégrale montrer l'équivalent

$$S_\alpha(x) \sim \Gamma(1-\alpha)\frac{1}{(1-x)^{1-\alpha}}$$

au voisinage de 1.

IV-4 Soient α un réel strictement positif et f une fonction à valeurs > 0 continûment dérivable sur $[0,+\infty[$ et telle que $\frac{f'(x)}{f(x)} \sim \frac{\alpha}{x}$ au voisinage de $+\infty$.
IV-4-a Montrer que l'on a au voisinage de $+\infty$

$$\ln f(x) \sim \ln x^\alpha.$$

IV-4-b La série $\sum_{n\geqslant 1} f(n)$ est-elle convergente?
IV-4-c Montrer, pour tout $t > 0$, la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 1} f(n)e^{-nt}$ ainsi que la sommabilité de la fonction $x \longrightarrow e^{-tx}f(x)$ sur $[0,+\infty[$.

IV-4-d Montrer que la fonction $t \longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} f(n)e^{-nt}$ tend vers $+\infty$ lorsque t tend vers 0.

IV-5-a Montrer pour $\lambda > 0$ fixé que $\lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{f(\lambda x)}{f(x)} = \lambda^\alpha$.

(Indication : On pourra introduire l'intégrale $\int_x^{\lambda x}\frac{f'(s)}{f(s)}ds$ pour $x > 0$)
IV-5-b Montrer que lorsque t tend vers 0 à droite, on a

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)e^{-nt} \sim \int_0^{+\infty} e^{-tx}f(x)dx.$$

IV-5-c On suppose f croissante. Déduire de ce qui précède, lorsque t tend vers 0 à droite

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)e^{-nt} \sim \frac{\Gamma(\alpha+1)}{t} f\left(\frac{1}{t}\right).$$

IV-5-d Reprendre la question précédente sans l'hypothèse f croissante.

****

FIN